Μαθημα 24ο 28/5/2016

Αναλυτικη Γεωμετρια

Υπερβολοειδες

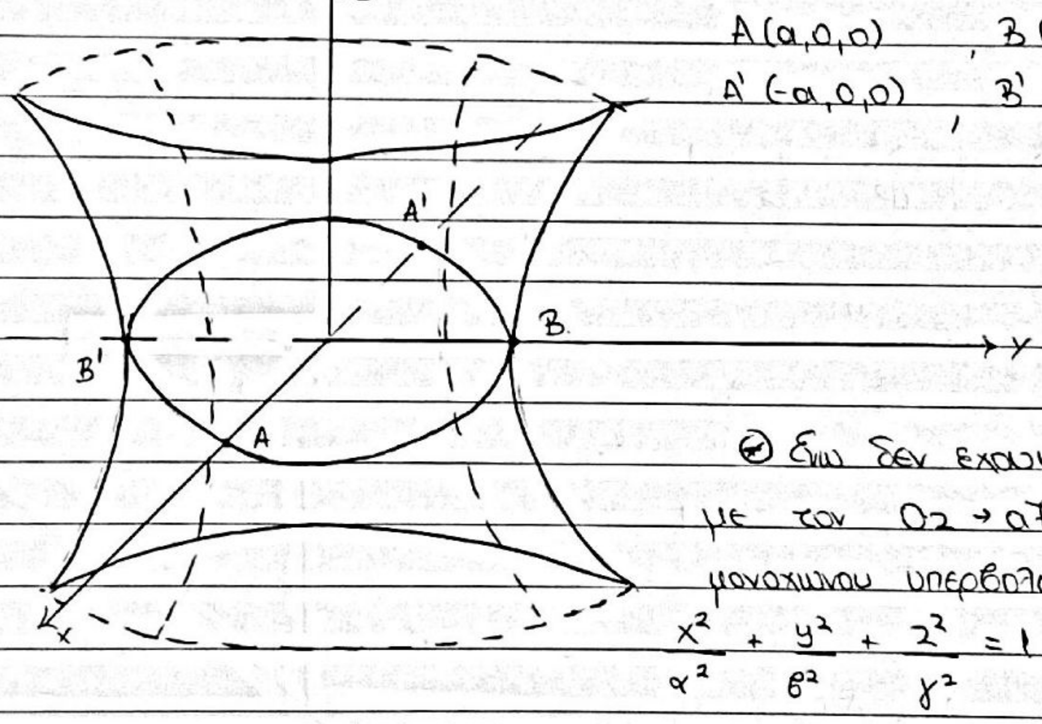
• Μονοχωνο υπερβολοειδες

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1 \quad ή \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$$

$$ή \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$$

• Η αρχη $O(0,0,0)$ λεγεται κορυφη του υπερβολοειδους

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{\beta^2}+\frac{(z-z_0)^2}{\gamma^2}=1$$ με κορυφη $K(x_0,y_0,z_0)$



$A(a,0,0)$, $B(0,\beta,0)$

$A'(-a,0,0)$, $B'(0,-\beta,0)$

⊛ Ενω δεν εχουμε τομη με τον Oz → αξονας του μονοχωνου υπερβολοειδους

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$$

Παρατηρησεις

① τομη του $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1$ με το επιπεδο $z=\kappa$

Ελλειψη $\left\{ \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1+\frac{\kappa^2}{\gamma^2},\ \kappa\in\mathbb{R} \right\} \Rightarrow$

$$\frac{x^2}{\underbrace{\left(\alpha\sqrt{1+\frac{\kappa^2}{\gamma^2}}\right)^2}_{(\alpha')^2}}+\frac{y^2}{\underbrace{\left(\beta\sqrt{1+\kappa^2/\gamma^2}\right)^2}_{(\beta')^2}}=1$$

② τομη με επιπεδο $x=\kappa$

Υπερβολη $\left\{ \frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1-\frac{\kappa^2}{\gamma^2},\ x=\kappa \right\},\ |\kappa|<\alpha$

(*) αν $\alpha=\beta \Rightarrow$ μονοχωνο υπερβολοειδες εκ περιστροφης

υπερβολη $\left\{ \frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1,\ y=0 \right\}$ γυρω απο τον αξονα Oz.

- Διχωνο υπερβολοειδες

$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1$ ή $-\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$

ή $-\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1$

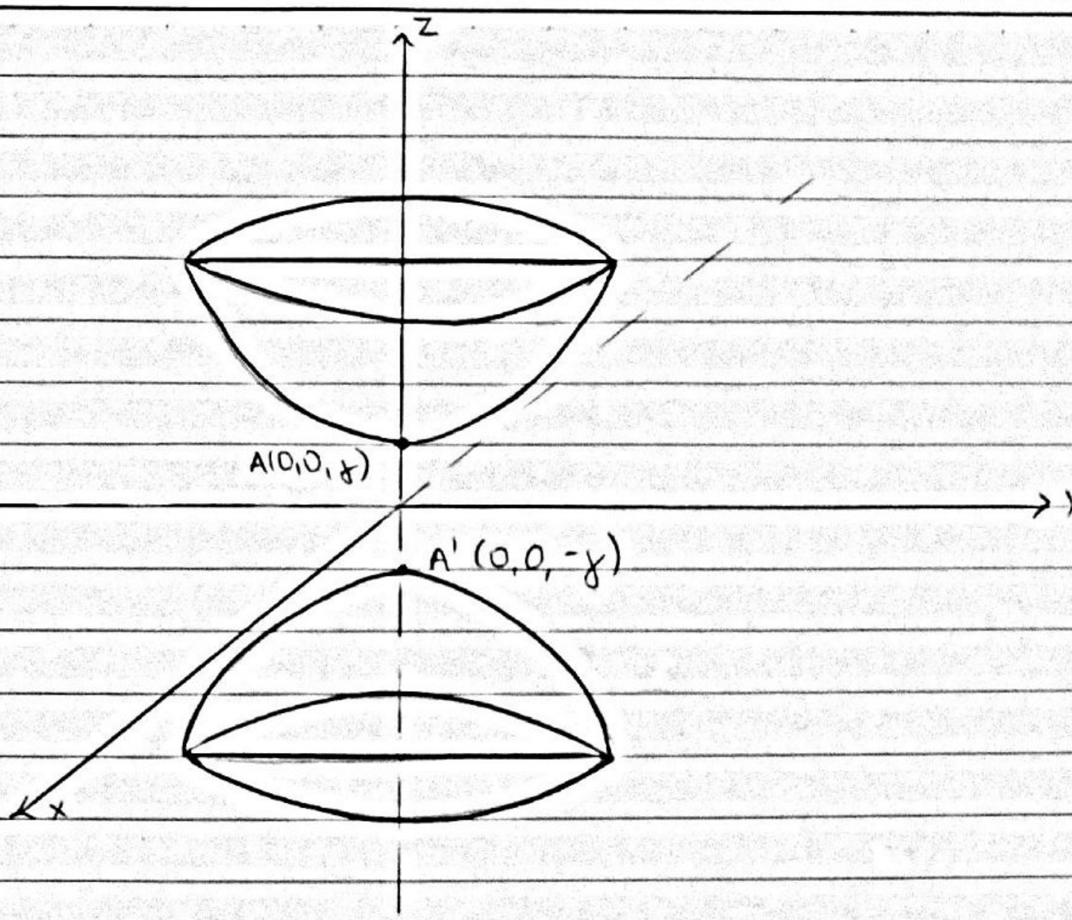
(*) Τομη με τον Oz

$A(0,0,\gamma)$, $A'(0,0,-\gamma)$

(*) OA' τομη με αλλους αξονες.

(*) Μεταξυ των επιπεδων

$z=\gamma$, $z=-\gamma$ η επιφανεια δεν εχει σημεια



Τομη $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$, $z=k$, $|k|>\gamma$

$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=\frac{z^2}{\gamma^2}-1>0$

→ Ελλειψη : θελει να ερθει στην καταλληλη μορφη

Τομη $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$, $y=k\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \frac{z^2}{\gamma^2}-\frac{x^2}{a^2}=1+\frac{y^2}{\beta^2}$

→ Υπερβολη: φερνοντας το στην καταλληλη μορφη (γ) Αντιστοιχα $-\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$

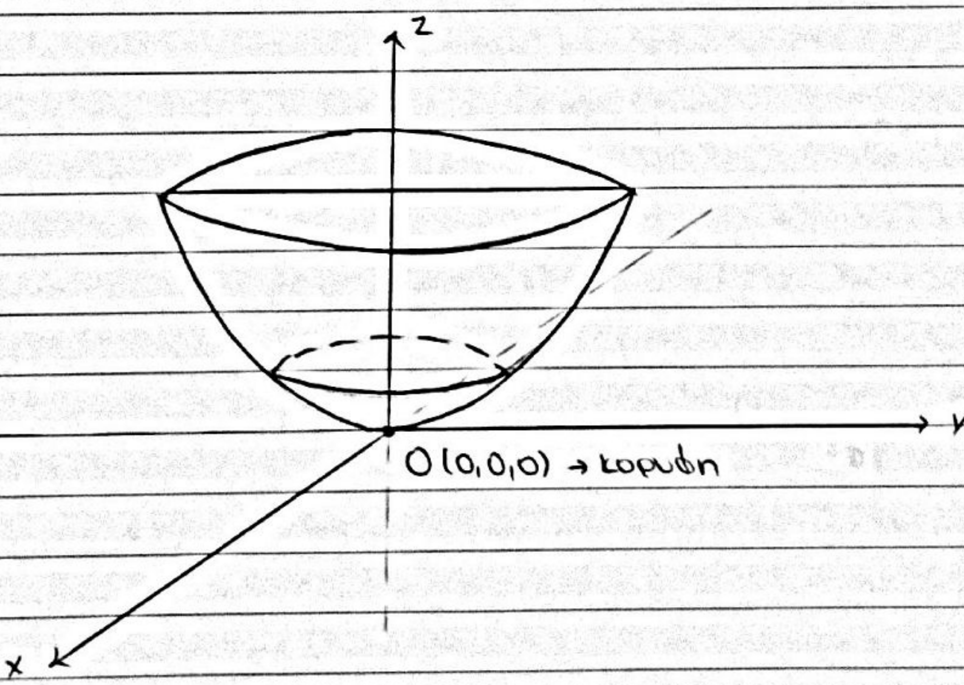
Εχουμε $\alpha=\beta \Rightarrow$ διχωνο υπερβολοειδες εκ περιστροφης της υπερβολης $\left\{\frac{z^2}{\gamma^2}-\frac{x^2}{\alpha^2}=1,\ y=0\right\}$ γυρω απο τον αξονα Oz

- Παραβολοειδη : α) Ελλειπτικα παραβολοειδη
  β) Υπερβολικα παραβολοειδη

α) Οριζεται ως η επιφανεια, η εξισωση της οποιας εχει την μορφη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=\gamma z$ $\left\{\begin{array}{l}\alpha,\beta>0,\ \gamma\neq 0\\ \alpha,\beta,\gamma \text{ σταθερες}\end{array}\right\}$

ή $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{z^2}{\beta^2}=\gamma y$ ή $\frac{y^2}{\alpha^2}+\frac{z^2}{\beta^2}=\gamma x$

$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=\gamma z$ → ο Oz καλειται αξονας του ελλειπτικου παραβολοειδους



$$\left\{\begin{array}{c}\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=\gamma(z-z_0)\\ \text{με κορυφή } (x_0,y_0,z_0)\end{array}\right\}$$

Τομή $\left\{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\gamma z\right\}$ $\gamma>0$

- με επίπεδο $z=k$ $(\neq 0)$ έλλειψη (σε ανηγμένη μορφή) ($k\neq 0$ διότι σημείο)
- με επίπεδο $y=k$ $\dfrac{x^2}{a^2}=\gamma z-\dfrac{k^2}{b^2}$ παραβολή

⊕ Αν $a=b$ => έχουμε ελλειπτικό παραβολοειδές εκ περιστροφής (προκύπτει από την περιστροφή της παραβολής) $\left\{\dfrac{x^2}{a^2}=\gamma z,\ y=0\right\}$ γύρω από τον άξονα Oz

β) Εξίσωση της μορφής: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\gamma z$ ($a,b>0$, $\gamma\neq 0$)

ή $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=\gamma y$ ή $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=\gamma x$

μορφή επιφάνειας $O(0,0,0)$ → άξονας επιφάνειας

$$\left\{\begin{array}{c}\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=\gamma(z-z_0)\\ \text{κορυφή } (x_0,y_0,z_0)\end{array}\right\}$$

Τομη της $\left\{ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = \gamma z \right\}$, με επιπεδο $z=k$, $k \neq 0$

$\Downarrow$

<u>υπερβολη</u> $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = \gamma k$ ...... κατακόρυφη μορφη

• αν $k=0 \Rightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{\beta}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{\beta}\right) = 0 \Rightarrow$

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{a} - \frac{y}{\beta} = 0, \quad z=0 \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{\beta} = 0, \quad z=0 \end{array} \right.$ (ευθεια τομη επιπεδων)

Εξισωση εφαπτομενων επιπεδων επιφανειων σε σημειο $P_0(x_0, y_0, z_0)$

(+) Ελλειψη: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 \xrightarrow{\text{ΕΞ}} \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{\beta^2} + \frac{zz_0}{\gamma^2} = 1$

(+) Μον. υπερβ.: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 \xrightarrow{\text{ΕΞ}} \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{\beta^2} - \frac{zz_0}{\gamma^2} = 1$

(+) Ελλ. παραβ.: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 2\gamma z \xrightarrow{\text{ΕΞ}} \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{\beta^2} = \gamma(z + z_0)$

Γραμμικη Αλγεβρα ΙΙ για Γεωμετρια

Συμμετρικος πινακας $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \dots & \end{pmatrix} \quad \text{π.χ. } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \times$$

ΘΜ 1:

Αν A συμμετρικος $\Rightarrow$ οι ιδιοτιμες του πραγματικες

ΘΜ 2:

Εστω A συμμετρικος $\Rightarrow \exists$ ορθογωνιος πινακας P ετσι ωστε ο

$$P^t A P = \Delta \to \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \text{ διαγωνιος}$$

$$\left\{ \text{ορθογωνιος} \quad \begin{matrix} P^{-1} = P^t \\ P^t P = I \end{matrix} \right\}$$

Π-Χ

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ιδιοτιμες : χαρακτηριστικο πολυωνυμο

$$P_A = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

↳ Η λυση της εξισωσης δινει τις ιδιοτιμες

$-(\lambda+3)^2(\lambda-3)=0 \Rightarrow \lambda_1 = 3$ (απλη)

$\lambda_2 = -3$ (διπλη)

Ιδιοχωρος της ιδιοτιμης $\lambda_1 = 3$ $(V(3))$

$\Rightarrow$ Ο $V(3)$ περιγραφεται απο τις λυσεις του συστηματος

$$(\Sigma)\begin{cases} -4x+2y+2z=0 \\ 2x-4y+2z=0 \\ 2x+2y-4z=0 \end{cases}$$

γνωριζουμε οτι $\det\Sigma = 0$

Παρατηρουμε οτι $\exists$ η $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$

Αρα $\operatorname{rank} A = 2$

Ισχυει οτι $\dim W_T = \underbrace{r}_{\text{Αριθμος αγνωστων}} - r(A) = 3-2 = 1$.

Αφου $\dim W_T = 1$ εχουμε 1 παραμετρο $z=k$, $k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 2x-4y+2z=0 \\ 2x+2y-4z=0 \end{cases} \xRightarrow{z=k} \begin{cases} 2x-4y=-2k \\ 2x+2y=4k \end{cases}, \ k \in \mathbb{R}$$

$(-)$

$-6y = -6k \Rightarrow y = k$

Αρα εχω $y=k$, $x=k$, $z=k$.

Ο $V(3)$ αντιστοιχεί στο χώρο λύσεων του (Σ)

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=\kappa,\ y=\kappa,\ z=\kappa,\ \kappa \in \mathbb{R}\} =$

$= \{\kappa(1,1,1),\ \kappa \in \mathbb{R}\} \Rightarrow V(3) = \langle (1,1,1) \rangle$ βάση του $V(3)$

ιδιοδιάνυσμα

Ιδιοχώρος της ιδιοτιμής $\lambda_2 = -3$.

$$\begin{cases} 2x+2y+2z=0 \\ 2x+2y+2z=0 \\ 2x+2y+2z=0 \end{cases} \rightarrow A_\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \det A_\Sigma = 0$$

Παρατηρώ ότι κάθε 2×2 ορίζουσα $=0$

Αλλά παρατηρώ ότι $\exists$ το $2 \neq 0$ και κάθε 2×2 ορίζουσα του A_Σ που πλαισιώνει το Σ, είναι μηδέν $\Rightarrow r(A_\Sigma)=1$

$$\left\{ \dim N_T = r - r(A) = 3-1 = 2 \rightarrow \begin{array}{l} z=\kappa \\ y=\lambda \end{array},\ \kappa,\lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$2x+2y+2z=0 \xrightarrow[y=\lambda]{z=\kappa} x=-\kappa-\lambda \quad \kappa,\lambda \in \mathbb{R}$$

Ο $V(-3)$ αντιστοιχεί στο χώρο λύσεων του (Σ)

$V(-3) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ (x=-\kappa-\lambda,\ y=\lambda,\ z=\kappa),\ \lambda,\kappa \in \mathbb{R}\} =$

$= \{(-\kappa-\lambda, \lambda, \kappa)\ \lambda,\kappa \in \mathbb{R}\} = \{(-\kappa,0,\kappa) + (-\lambda,\lambda,0) / \kappa,\lambda \in \mathbb{R}\} =$

$= \{\kappa \underbrace{(-1,0,1)}_{\vec{x}_2} + \lambda \underbrace{(-1,1,0)}_{\vec{x}_3} / \kappa,\lambda \in \mathbb{R}\}$